1. CÁC KIẾN THỨC CẦN NẮM

1.1. Các hệ thức cơ bản

+ $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$

+ $1 + tg^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ $(\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi)$

+ $tg\alpha \,.\, cotg\alpha = 1$ $(\alpha \neq \dfrac{k\pi}{2})$

+ $1 + cotg^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$ $(\alpha \neq k\pi)$

1.2. Công thức cộng góc

+ $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$

+ $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$

+ $tg\,(\alpha \pm \beta) = \dfrac{tg\alpha \pm tg\beta}{1 \mp tg\alpha\, tg\beta}$ $(\alpha;\beta \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi)$

+ $cotg(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\cot g\alpha.\cot g\beta \mp 1}{\cot g\alpha \pm \cot g\beta}$ $(\alpha;\beta \neq k\pi)$

1.3. Công thức nhân

+ $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

+ $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$

+ $tg2\alpha = \dfrac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}$ $(\alpha \neq \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2})$

+ $cotg2\alpha = \dfrac{\cot g^2\alpha - 1}{2\cot g\alpha}$ $(\alpha \neq \dfrac{k\pi}{2})$

+ $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$

+ $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$

+ $tg3\alpha = \dfrac{3tg\alpha - tg^3\alpha}{1 - 3tg^3\alpha}$ $(\alpha \neq \dfrac{\pi}{6} + k\dfrac{\pi}{3})$

1.4. Công thức hạ bậc

+ $\cos^2\alpha = \dfrac{1 + \cos 2\alpha}{2}$

+ $\sin^2\alpha = \dfrac{1 - \cos 2\alpha}{2}$

+ $tg^2\alpha = \dfrac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$ $(\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi)$

1.5. Công thức biến đổi tổng thành tích:

+ $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\dfrac{\alpha + \beta}{2}\cos\dfrac{\alpha - \beta}{2}$

+ $\cos\alpha - \cos\beta = -\,2\sin\dfrac{\alpha + \beta}{2}\sin\dfrac{\alpha \quad \beta}{2}$

+ $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha + \beta}{2}\cos\dfrac{\alpha \quad \beta}{2}$

+ $\sin\alpha - \sin\beta = = -\,2\cos\dfrac{\alpha + \beta}{2}\sin\dfrac{\alpha - \beta}{2}$

$+\ \text{tg}\alpha \pm \text{tg}\beta = \dfrac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha.\cos\beta}\ \ (\alpha;\beta \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi)$

1.6. Công thức biến đổi tích thành tổng:

$+\ \cos\alpha.\cos\beta = \dfrac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)]$

$+\ \sin\alpha.\sin\beta = \dfrac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)]$

$+\ \sin\alpha.\cos\beta = \dfrac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)]$

Biểu thức đại số	**Biểu thức lượng giác tương tự**	**Công thức lượng giác**
$1 + x^2$	$1 + \tan^2 t$	$1+\tan^2 t = \dfrac{1}{\cos^2 t}$
$4x^3 - 3x$	$4\cos^3 t - 3\cos t$	$4\cos^3 t - 3\cos t = \cos 3t$
$2x^2 - 1$	$2\cos^2 t - 1$	$2\cos^2 t - 1 = \cos 2t$
$\dfrac{2x}{1-x^2}$	$\dfrac{2\tan t}{1-\tan^2 t}$	$\dfrac{2\tan t}{1-\tan^2 t} = \tan 2t$
$\dfrac{2x}{1+x^2}$	$\dfrac{2\tan t}{1+\tan^2 t}$	$\dfrac{2\tan t}{1+\tan^2 t} = \sin 2t$
$\dfrac{x+y}{1-xy}$	$\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$	$\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} = \tan(\alpha+\beta)$
$x^2 - 1$	$\dfrac{1}{\cos^2\alpha} - 1$	$\dfrac{1}{\cos^2\alpha} - 1 = \tan^2\alpha$
...	....	......

MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP LƯỢNG GIÁC ĐỂ CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC ĐẠI SỐ

I. DANG 1: Sử dụng hệ thức $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

1) Phương pháp:

a) Nếu thấy $x^2 + y^2 = 1$ thì đặt $\begin{cases} x = \sin\alpha \\ y = \cos\alpha \end{cases}$ với $\alpha \in [0, 2\pi]$

b) Nếu thấy $x^2 + y^2 = r^2$ $(r > 0)$ thì đặt $\begin{cases} x = r\sin\alpha \\ y = r\cos\alpha \end{cases}$ với $\alpha \in [0, 2\pi]$

2. Các ví du minh hoa:

VD1: Cho 4 số a, b, c, d thoả mãn: $a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1$

Chứng minh rằng: $-\sqrt{2} \leq a(c+d) + b(c-d) \leq \sqrt{2}$

Giải:

Đặt $\begin{cases} a = \sin u \\ b = \cos u \end{cases}$ và $\begin{cases} c = \sin v \\ d = \cos v \end{cases}$ $\Rightarrow$ S = sinu(sinv+cosv) + cosu(sinv-cosv)

$\Rightarrow$ P = a(c+d) + b(c-d) = (sinucosv+cosusinv) - (cosucosv - sinusinv)

= sin(u+v) - cos(u+v)

$\Leftrightarrow \quad S = \sqrt{2}\sin\left[(u+v) - \frac{\pi}{4}\right] \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \Rightarrow -\sqrt{2} \le S = a(c+d) + b(c-d) \le \sqrt{2}$ (đpcm)

VD2: Cho $a^2 + b^2 = 1$. Chứng minh rằng: $\left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right)^2 + \left(b^2 + \frac{1}{b^2}\right)^2 \ge \frac{25}{2}$

Giải:

Đặt a = cosα và b = sinα với $0 \le \alpha \le 2\pi$. Thế vào biểu thức vế trái rồi biến đổi.

$$\left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right)^2 + \left(b^2 + \frac{1}{b^2}\right)^2 = \left(\cos^2\alpha + \frac{1}{\cos^2\alpha}\right)^2 + \left(\sin^2\alpha + \frac{1}{\sin^2\alpha}\right)^2$$

$$= \cos^4\alpha + \sin^4\alpha + \frac{1}{\cos^4\alpha} + \frac{1}{\sin^4\alpha} + 4 = \cos^4\alpha + \sin^4\alpha + \frac{\cos^4\alpha + \sin^4\alpha}{\cos^4\alpha.\sin^4\alpha} + 4$$

$$= \left(\cos^4\alpha + \sin^4\alpha\right)\left(1 + \frac{1}{\cos^4\alpha.\sin^4\alpha}\right) + 4$$

$$= \left[\left(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\right) - 2\cos^2\alpha\sin^2\alpha\right]\left(1 + \frac{1}{\cos^4\alpha.\sin^4\alpha}\right) + 4$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\sin^2 2\alpha\right)\left(1 + \frac{16}{\sin^4 2\alpha}\right) + 4 \ge \left(1 - \frac{1}{2}\right)(1+16) + 4 = \frac{17}{2} + 4 = \frac{25}{2} \text{ (đpcm)}$$

Bây giờ ta đẩy bài toán lên mức độ cao hơn một bước nữa để xuất hiện $a^2+b^2=1$

VD3: Cho $a^2 + b^2 - 2a - 4b + 4 = 0$. Chứng minh rằng:

$$A = \left|a^2 - b^2 + 2\sqrt{3}ab - 2(1+2\sqrt{3})a + (4-2\sqrt{3})b + 4\sqrt{3} - 3\right| \le 2$$

Giải:

Biến đổi điều kiện: $a^2 + b^2 - 2a - 4b + 4 = 0 \Leftrightarrow (a-1)^2 + (b-2)^2 = 1$

Đặt $\begin{cases} a - 1 = \sin\alpha \\ b - 2 = \cos\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 + \sin\alpha \\ b = 2 + \cos\alpha \end{cases} \Rightarrow A = \left|\sin^2\alpha - \cos^2\alpha + 2\sqrt{3}\sin\alpha\cos\alpha\right|$

$$A = \left|\sqrt{3}\sin 2\alpha - \cos 2\alpha\right| = 2\left|\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\alpha - \frac{1}{2}\cos 2\alpha\right| = 2\left|\sin(2\alpha - \frac{\pi}{6})\right| \le 2 \text{ (đpcm)}$$

VD4: Cho a, b thoả mãn : $|5a + 12b + 7| = 13$

G.NTH

Chứng minh rằng: $a^2 + b^2 + 2(b-a) \geq -1$

Giải:

Biến đổi bất đẳng thức: $a^2 + b^2 + 2(b-a) \geq -1 \Leftrightarrow (a-1)^2 + (b+1)^2 \geq 1$

Đặt $\begin{cases} a-1 = R\sin\alpha \\ b+1 = R\cos\alpha \end{cases}$ với $R \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = R\sin\alpha + 1 \\ b = R\cos\alpha - 1 \end{cases} \Leftrightarrow (a-1)^2 + (b+1)^2 = R^2$

Ta có: $|5a + 12b + 7| = 13 \Leftrightarrow |5(R\sin\alpha + 1) + 12(R\cos\alpha - 1) + 7| = 13$

$$\Leftrightarrow |5R\sin\alpha + 12R\cos\alpha| = 13 \Leftrightarrow 1 = R\left|\frac{5}{13}\sin\alpha + \frac{12}{13}\cos\alpha\right| = R\left|\sin\left(\alpha + \arccos\frac{5}{13}\right)\right| \leq R$$

Từ đó $\Rightarrow (a-1)^2 + (b+1)^2 = R^2 \geq 1 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + 2(b-a) \geq -1$ (đpcm)

***II. DANG 2**: Sử dụng tập giá trị* $|\sin\alpha| \leq 1$; $|\cos\alpha| \leq 1$

***1. Phương pháp**:*

a) Nếu thấy $|x| \leq 1$ thì đặt $\left[\begin{array}{l} x = \sin\alpha \ \ khi \ \ \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \\ x = \cos\alpha \ \ khi \ \ \alpha \in [0; \pi] \end{array}\right.$

b) Nếu thấy $|x| \leq m$ ($m \geq 0$) thì đặt $\left[\begin{array}{l} x = m\sin\alpha \ \ khi \ \ \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \\ x = m\cos\alpha \ \ khi \ \ \alpha \in [0; \pi] \end{array}\right.$

2. Các ví du minh hoa:

VD1: Chứng minh rằng: $(1+x)^p + (1-x)^p \leq 2^p \ \forall \ |x| \leq 1$; $\forall \ P \geq 1$.

Giải:

Đặt $x = \cos\alpha$ với $\alpha \in [0, \pi]$, khi đó $(1 + x)^p + (1 - x)^p = (1+\cos\alpha)^p + (1-\cos\alpha)^p$

$$= \left(2\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)^p + \left(2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)^p = 2^p\left(\cos^{2p}\frac{\alpha}{2} + \sin^{2p}\frac{\alpha}{2}\right) \leq 2^p\left(\cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2}\right) = 2^p$$

(đpcm)

VD2: Chứng minh rằng: $\frac{\sqrt{3} - 2}{2} \leq \sqrt{3}x^2 + x\sqrt{1 - x^2} \leq \frac{\sqrt{3} + 2}{2}$

Giải:

Từ đk $1 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow |x| \leq 1$ nên

Đặt $x = \cos\alpha$ với $0 \leq \alpha \leq \pi \Rightarrow \sqrt{1 - x^2} = \sin\alpha$. Khi đó ta có:

$P = 2\sqrt{3}x^2 + 2x\sqrt{1 - x^2} = 2\sqrt{3}\cos^2\alpha + 2\cos\alpha\sin\alpha = \sqrt{3}(1 + \cos 2\alpha) + \sin 2\alpha$

$$=2\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2\alpha+\frac{1}{2}\sin 2\alpha\right]+\sqrt{3}=2\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}\Rightarrow\sqrt{3}-2\le A\le\sqrt{3}+2\,(\text{đpcm})$$

VD3: Chứng minh rằng: $\sqrt{1+\sqrt{1-a^2}}\left[\sqrt{(1+a)^3}-\sqrt{(1-a)^3}\right]\le 2\sqrt{2}+\sqrt{2-2a^2}$ (1)

Giải:

Từ đk $|a|\le 1$ nên

Đặt a=cosα với α∈ [0,π] $\Rightarrow\ \sqrt{1-a}=\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2};\sqrt{1+a}=\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2};\sqrt{1-a^2}=\sin\alpha$

$$(1)\Leftrightarrow\ \sqrt{1+2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}.2\sqrt{2}\left[\cos^3\frac{\alpha}{2}-\sin^3\frac{\alpha}{2}\right]\le 2\sqrt{2}+2\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$$

$$\Leftrightarrow\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right)\left(\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\right)\left(\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)\le 1+\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$$

$$\Leftrightarrow\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right)\left(\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\right)=\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}=\cos\alpha\le 1\ \text{đúng}\Rightarrow(\text{đpcm})$$

VD4: Chứng minh rằng: $S=\left|4\left(\sqrt{(1-a^2)^3}-a^3\right)+3\left(a-\sqrt{1-a^2}\right)\right|\le\sqrt{2}$

Giải:

Từ đk $|a|\le 1$ nên:

Đặt a = cosα với α ∈ [0, π] $\Rightarrow\ \sqrt{1-a^2}=\sin\alpha$. Khi đó biến đổi S ta có:

$$S=\left|4(\sin^3\alpha-\cos^3\alpha)+3(\cos\alpha-\sin\alpha)\right|=\left|(3\sin\alpha-4\sin^3\alpha)+(4\cos^3\alpha-3\cos\alpha)\right|$$

$$=\left|\sin 3\alpha+\cos 3\alpha\right|=\sqrt{2}\left|\sin\left(3\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\right|\le\sqrt{2}\ \Rightarrow(\text{đpcm})$$

VD5: Chứng minh rằng $A=\left|a\sqrt{1-b^2}+b\sqrt{1-a^2}+\sqrt{3}\left(ab-\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}\right)\right|\le 2$

Giải:

Từ điều kiện: $1-a^2\ge 0$; $1-b^2\ge 0\Leftrightarrow |a|\le 1$; $|b|\le 1$ nên.

Đặt a = sinα, b = sin β với α, β ∈ $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

Khi đó $A=\left|\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta-\sqrt{3}\cos(\alpha+\beta)\right|=$

$$=\left|\sin(\alpha+\beta)-\sqrt{3}\cos(\alpha+\beta)\right|=2\left|\frac{1}{2}\sin(\alpha+\beta)-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(\alpha+\beta)\right|=2\left|\sin\left[(\alpha+\beta)-\frac{\pi}{3}\right]\right|\le 2$$

(đpcm)

VD6: Chứng minh rằng: $A=|4a^3-24a^2+45a-26|\le 1\ \forall a\in[1;3]$

Giải:

Do a ∈ [1, 3] nên |a-2| ≤ 1 nên ta đặt a - 2 = cosα ⇔ a = 2 + cosα. Ta có:

$$A = \left|4(2+\cos\alpha)^3 - 24(2+\cos\alpha)^2 + 45(2+\cos\alpha) - 26\right| = \left|4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha\right| = \left|\cos 3\alpha\right| \le 1$$

(đpcm)

VD7: Chứng minh rằng: $A = \left|\sqrt{2a-a^2} - \sqrt{3}a + \sqrt{3}\right| \le 2 \quad \forall\ a \in [0, 2]$

Giải:

Do a ∈ [0, 2] nên |a-1| ≤ 1 nên ta đặt a - 1 = cosα với α ∈ [0, π]. Ta có:

$$A = \left|\sqrt{2(1+\cos\alpha) - (1-\cos\alpha)^2} - \sqrt{3}(1+\cos\alpha) + \sqrt{3}\right| = \left|\sqrt{1-\cos^2\alpha} - \sqrt{3}\cos\alpha\right|$$

$$= \left|\sin\alpha - \sqrt{3}\cos\alpha\right| = \left|2\left(\frac{1}{2}\sin\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha\right)\right| = 2\left|\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)\right| \le 2 \text{ (đpcm)}$$

III. DANG 3*: Sử dụng công thức:* $1+tg^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow tg^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} - 1 \ \left(\alpha \ne \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right)$

1) Phương pháp:

a) Nếu |x| ≥ 1 hoặc bài toán có chứa biểu thức $\sqrt{x^2-1}$

thì đặt $x = \dfrac{1}{\cos\alpha}$ với $\alpha \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right) \cup \left[\pi, \dfrac{3\pi}{2}\right)$

b) Nếu |x| ≥ m hoặc bài toán có chứa biểu thức $\sqrt{x^2-m^2}$

thì đặt $x = \dfrac{m}{\cos\alpha}$ với $\alpha \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right) \cup \left[\pi, \dfrac{3\pi}{2}\right)$

2. Các ví du minh hoa:

VD1: Chứng minh rằng $A = \left|\dfrac{\sqrt{a^2-1}+\sqrt{3}}{a}\right| \le 2 \quad \forall |a| \ge 1$

Giải:

Do |a| ≥ 1 nên :

Đặt $a = \dfrac{1}{\cos\alpha}$ với $\alpha \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right) \cup \left[\pi, \dfrac{3\pi}{2}\right) \Rightarrow \sqrt{a^2-1} = \sqrt{tg^2\alpha} = tg\alpha$. Khi đó:

$$A = \left|\frac{\sqrt{a^2-1}+\sqrt{3}}{a}\right| = \left|(tg\alpha + \sqrt{3})\cos\alpha\right| = \left|\sin\alpha + \sqrt{3}\cos\alpha\right| = 2\left|\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)\right| \le 2 \text{ (đpcm)}$$

VD2: Chứng minh rằng: $-4 \le A = \dfrac{5 - 12\sqrt{a^2-1}}{a^2} \le 9 \quad \forall |a| \ge 1$

Giải:

Do |a| ≥ 1 nên:

Đặt $a = \dfrac{1}{\cos\alpha}$ với $\alpha \in \left[0;\dfrac{\pi}{2}\right) \cup \left[\pi, \dfrac{3\pi}{2}\right) \Rightarrow \sqrt{a^2-1} = \sqrt{tg^2\alpha} = tg\alpha$. Khi đó:

$$A = \frac{5-12\sqrt{a^2-1}}{a^2} = (5-12tg\alpha)\cos^2\alpha = 5\cos^2\alpha - 12\sin\alpha\cos\alpha = \frac{5(1+\cos 2\alpha)}{2} - 6\sin 2\alpha$$

$$= \frac{5}{2} + \frac{13}{2}\left(\frac{5}{13}\cos 2\alpha - \frac{12}{13}\sin 2\alpha\right) = \frac{5}{2} + \frac{13}{2}\cos\left(2\alpha + \arccos\frac{5}{13}\right)$$

$$\Rightarrow -4 = \frac{5}{2} + \frac{13}{2}(-1) \le A = \frac{5}{2} + \frac{13}{2}\cos\left(2\alpha + \arccos\frac{5}{13}\right) \le \frac{5}{2} + \frac{13}{2}.1 = 9 \ \text{(đpcm)}$$

VD3: Chứng minh rằng: $A = \left|\dfrac{\sqrt{a^2-1}+\sqrt{b^2-1}}{ab}\right| \le 1 \quad \forall |a|;|b| \ge 1$

Giải:

Do |a| ≥ 1; |b| ≥ 1 nên .

Đặt $a = \dfrac{1}{\cos\alpha}$; $b = \dfrac{1}{\cos\beta}$ với $\alpha \in \left[0;\dfrac{\pi}{2}\right) \cup \left[\pi, \dfrac{3\pi}{2}\right)$. Khi đó ta có:

$$A = \left|(tg\alpha + tg\beta)\cos\alpha\cos\beta\right| = \left|\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha\right| = \left|\sin(\alpha+\beta)\right| \le 1 \ \text{(đpcm)}$$

VD4: Chứng minh rằng: $a + \dfrac{a}{\sqrt{a^2-1}} \ge 2\sqrt{2} \quad \forall |a| > 1$

Giải:

Do |a| > 1 nên:

Đặt $a = \dfrac{1}{\cos\alpha}$ với $\alpha \in \left(0;\dfrac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \dfrac{a}{\sqrt{a^2-1}} = \dfrac{1}{\cos\alpha}.\dfrac{1}{\sqrt{tg^2\alpha}} = \dfrac{1}{\sin\alpha}$. Khi đó:

$$a + \frac{a}{\sqrt{a^2-1}} = \frac{1}{\cos\alpha} + \frac{1}{\sin\alpha} \ge 2.\sqrt{\frac{1}{\cos\alpha}.\frac{1}{\sin\alpha}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\sin 2\alpha}} \ge 2\sqrt{2} \ \text{(đpcm)}$$

VD5: Chứng minh rằng $y\sqrt{x^2-1} + 4\sqrt{y^2-1} + 3 \le xy\sqrt{26} \quad \forall |x|;|y| \ge 1$

Giải:

Bất đẳng thức $\Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x} + \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{4\sqrt{y^2-1}}{y} + \dfrac{3}{y}\right) \le \sqrt{26} \quad (1)$

Do |x|; |y| ≥ 1 nên Đặt $x = \dfrac{1}{\cos\alpha}$; $y = \dfrac{1}{\cos\beta}$ với $\alpha, \beta \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Khi đó: (1) $\Leftrightarrow$ S = sinα + cosα(4sinβ + 3cosβ) $\leq \sqrt{26}$

Ta có: $S \leq \sin\alpha + \cos\alpha\sqrt{(4^2+3^2)(\sin^2\beta+\cos^2\beta)} = \sin\alpha + 5\cos\alpha$

$\leq \sqrt{(1^2+5^2)(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)} = \sqrt{26} \Rightarrow$ (đpcm)

***IV. DANG 4**: Sử dụng công thức* $1+tg^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$

1. Phương pháp:

a) Nếu $x \in R$ và bài toán chứa $(1+x^2)$ thì đặt x = tgα với $\alpha \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$

b) Nếu $x \in R$ và bài toán chứa (x^2+m^2) thì đặt x = mtgα với $\alpha \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$

2. Các ví du minh hoa:

VD1: Chứng minh rằng: $S = \left|\dfrac{3x}{\sqrt{1+x^2}} - \dfrac{4x^3}{\sqrt{(1+x^2)^3}}\right| \leq 1$

Giải:

Đặt x = tgα với $\alpha \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \sqrt{1+x^2} = \dfrac{1}{\cos\alpha}$, khi đó biến đổi S ta có:

S = |3tgα.cosα - 4tg³α.cos³α| = |3sinα - 4sin³α| = |sin3α| ≤ 1 (đpcm)

VD2: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $A = \dfrac{3+8a^2+12a^4}{(1+2a^2)^2}$

Giải:

Đặt $a\sqrt{2} = tg\alpha$ với $\alpha \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ thì ta có: $A = \dfrac{3+4tg^2\alpha+3tg^4\alpha}{(1+tg^2\alpha)^2}$

$$= \frac{3\cos^4\alpha+4\sin^2\alpha\cos^2\alpha+3\sin^4\alpha}{(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)^2} = 3(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2 - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$$

$$= 3 - \frac{\sin^2 2\alpha}{2} \Rightarrow \frac{5}{2} = 3 - \frac{1}{2} \leq A = 3 - \frac{\sin^2 2\alpha}{2} \leq 2 - \frac{0}{2} = 3$$

Với $\alpha = 0 \Rightarrow a = 0$ thì MaxA = 3 ; Với $\alpha = \dfrac{\pi}{4} \Rightarrow a = \dfrac{1}{2}$ thì MinA = $\dfrac{5}{2}$

VD3: Chứng minh rằng: $\left|\dfrac{(a+b)(1-ab)}{(1+a^2)(1+b^2)}\right| \leq \dfrac{1}{2}$ $\forall$ a, b $\in$ R

Giải:

Đặt a = tgα, b = tgβ. Khi đó $\left|\frac{(a+b)(1-ab)}{(1+a^2)(1+b^2)}\right| = \left|\frac{(tg\alpha+tg\beta)(1-tg\alpha tg\beta)}{(1+tg^2\alpha)(1+tg^2\beta)}\right|$

$= \left|\cos^2\alpha\cos^2\beta.\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha.\cos\beta}.\frac{\cos\alpha.\cos\beta-\sin\alpha.\sin\beta}{\cos\alpha.\cos\beta}\right|$

$= |\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)| = \frac{1}{2}|\sin[2(\alpha+\beta)]| \le \frac{1}{2}$ (đpcm)

VD4: Chứng minh rằng: $\frac{|a-b|}{\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)}} + \frac{|b-c|}{\sqrt{(1+b^2)(1+c^2)}} \ge \frac{|c-a|}{\sqrt{(1+c^2)(1+a^2)}}$ $\forall a,b,c$

Giải:

Đặt a = tgα, b = tgβ, c = tgγ. Khi đó bất đẳng thức ⇔

$\Leftrightarrow \frac{|tg\alpha - tg\beta|}{\sqrt{(1+tg^2\alpha)(1+tg^2\beta)}} + \frac{|tg\beta - tg\gamma|}{\sqrt{(1+tg^2\beta)(1+tg^2\gamma)}} \ge \frac{|tg\gamma - tg\alpha|}{\sqrt{(1+tg^2\gamma)(1+tg^2\alpha)}}$

$\Leftrightarrow \left|\cos\alpha\cos\beta.\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha.\cos\beta}\right| + \left|\cos\beta\cos\gamma.\frac{\sin(\beta-\gamma)}{\cos\beta.\cos\gamma}\right| \ge \left|\cos\gamma\cos\alpha.\frac{\sin(\gamma-\alpha)}{\cos\gamma.\cos\alpha}\right|$

⇔ |sin(α-β)|+|sin(β-γ)| ≥ |sin(γ-α)|. Biến đổi biểu thức vế phải ta có:

|sin(γ-α)|= |sin[(α-β)+(β-γ)]| = |sin(α-β)cos(β-γ)+sin(β-γ)cos(α-β)| ≤

|sin(α-β)cos(β-γ)|+|sin(β-γ)cos(α-β)|=|sin(α-β)||cos(β-γ)|+|sin(β-γ)||cos(α-β)|

≤ |sin(α-β)|.1 + |sin(β-γ)|.1 = |sin(α-β)| + |sin(β-γ)| ⇒ (đpcm)

VD5: Chứng minh rằng: $\sqrt{ab}+\sqrt{cd} \le \sqrt{(a+c)(b+d)}$ (1) $\forall a,b,c,d>0$

Giải:

$(1) \Leftrightarrow \sqrt{\frac{ab}{(a+c)(b+d)}} + \sqrt{\frac{cd}{(a+c)(b+d)}} \le 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{\left(1+\frac{c}{a}\right)\left(1+\frac{b}{d}\right)}} + \frac{\sqrt{\frac{cd}{ab}}}{\sqrt{\left(1+\frac{c}{a}\right)\left(1+\frac{b}{d}\right)}} \le 1$

Đặt $tg^2\alpha=\frac{c}{a}$, $tg^2\beta=\frac{d}{b}$ với $\alpha,\beta \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ ⇒ Biến đổi bất đẳng thức

$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{(1+tg^2\alpha)(1+tg^2\beta)}} + \frac{\sqrt{tg^2\alpha.tg^2\beta}}{\sqrt{(1+tg^2\alpha)(1+tg^2\beta)}} = \sqrt{\cos^2\alpha\cos^2\beta} + \sqrt{\sin^2\alpha\sin^2\beta} \le 1$

⇔ cosα cosβ + sinα sinβ = cos(α-β) ≤ 1 đúng ⇒ (đpcm)

Dấu bằng xảy ra ⇔ cos(α-β) = 1 ⇔ α=β ⇔ $\frac{c}{a}=\frac{d}{b}$

VD6: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $A = \frac{6a+4|a^2-1|}{a^2+1}$

Giải:

Đặt $a = tg\frac{\alpha}{2}$. Khi đó $A = \dfrac{6tg\frac{\alpha}{2} + 4|tg^2\frac{\alpha}{2} - 1|}{tg^2\frac{\alpha}{2} + 1} = 3.\dfrac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1 + tg^2\frac{\alpha}{2}} + 4.\left|\dfrac{tg^2\frac{\alpha}{2} - 1}{tg^2\frac{\alpha}{2} + 1}\right|$

$A = 3\sin\alpha + 4|\cos\alpha| \geq 3\sin\alpha + 4.0 = 3\sin\alpha \geq 3.(-1) = -3$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz ta có:

$A^2 = (3\sin\alpha + 4|\cos\alpha|)^2 \leq (3^2 + 4^2)(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = 25 \Rightarrow A \leq 5$

Với $\sin\alpha = 1 \Leftrightarrow a = 1$ thì MinA = - 3 ; với $\frac{\sin\alpha}{3} = \frac{|\cos\alpha|}{4}$ thì MaxA = 5

***V. DANG 5*: Đổi biến số đưa về bất đẳng thức tam giác**

1) Phương pháp:

a) Nếu $\begin{cases} x; y; z > 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1 \end{cases}$ thì $\exists \Delta ABC: \begin{cases} A; B; C \in (0; \frac{\pi}{2}) \\ x = \cos A; y = \cos B; z = \cos C \end{cases}$

b) Nếu $\begin{cases} x; y; z > 0 \\ x + y + z = xyz \end{cases}$ thì $\exists \Delta ABC: \begin{cases} A; B; C \in (0; \frac{\pi}{2}) \\ x = tgA; y = tgB; z = tgC \end{cases}$

c) Nếu $\begin{cases} x; y, z > 0 \\ xy + yz + zx = 1 \end{cases}$ thì $\exists \Delta ABC: \left[\begin{array}{l} \begin{cases} A; B; C \in (0; \frac{\pi}{2}) \\ x = \cot gA; y = \cot gB; z = \cot gC \end{cases} \\ \begin{cases} A; B; C \in (0; \pi) \\ x = tg\frac{A}{2}; y = tg\frac{B}{2}; z = tg\frac{C}{2} \end{cases} \end{array}\right.$

2. Các ví du minh hoa:

VD1: Cho x, y, z > 0 và zy + yz + zx = 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức.

$$S = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} - 3(x + y + z)$$

Giải:

Từ 0 < x, y, z < 1 nên đặt $x = tg\frac{\alpha}{2}$; $y = tg\frac{\beta}{2}$; $z = tg\frac{\gamma}{2}$ với $\alpha, \beta, \gamma \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

Do xy + yz + zx = 1 nên $tg\frac{\alpha}{2}tg\frac{\beta}{2} + tg\frac{\beta}{2}tg\frac{\gamma}{2} + tg\frac{\gamma}{2}tg\frac{\alpha}{2} = 1$

$$\Leftrightarrow \text{tg}\frac{\alpha}{2}\left(\text{tg}\frac{\beta}{2}+\text{tg}\frac{\gamma}{2}\right) = 1 - \text{tg}\frac{\beta}{2}\text{tg}\frac{\gamma}{2} \Leftrightarrow \frac{\text{tg}\frac{\beta}{2}+\text{tg}\frac{\gamma}{2}}{1-\text{tg}\frac{\beta}{2}\text{tg}\frac{\gamma}{2}} = \frac{1}{\text{tg}\frac{\alpha}{2}} \Leftrightarrow \text{tg}\left(\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}\right) = \text{cotg}\frac{\alpha}{2}$$

$$\Leftrightarrow \text{tg}\left(\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}\right) = \text{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}\right) \Leftrightarrow \frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2} = \frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \alpha+\beta+\gamma=\pi$$

$$S = \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}-3(x+y+z) = \text{cotg}\frac{\alpha}{2}+\text{cotg}\frac{\beta}{2}+\text{cotg}\frac{\gamma}{2} - 3\left(\text{tg}\frac{\alpha}{2}+\text{tg}\frac{\beta}{2}+\text{tg}\frac{\gamma}{2}\right)$$

$$S = \left(\text{cotg}\frac{\alpha}{2}-\text{tg}\frac{\alpha}{2}\right)+\left(\text{cotg}\frac{\beta}{2}-\text{tg}\frac{\beta}{2}\right)+\left(\text{cotg}\frac{\gamma}{2}-\text{tg}\frac{\gamma}{2}\right)-2\left(\text{tg}\frac{\alpha}{2}+\text{tg}\frac{\beta}{2}+\text{tg}\frac{\gamma}{2}\right)$$

$$S = 2(\text{cotg}\alpha+\text{cotg}\beta+\text{cotg}\gamma) - 2\left(\text{tg}\frac{\alpha}{2}+\text{tg}\frac{\beta}{2}+\text{tg}\frac{\gamma}{2}\right)$$

$$S = (\text{cotg}\alpha+\text{cotg}\beta-2\text{tg}\frac{\gamma}{2}) + (\text{cotg}\beta+\text{cotg}\gamma-2\text{tg}\frac{\alpha}{2}) + (\text{cotg}\alpha+\text{cotg}\beta-2\text{tg}\frac{\beta}{2})$$

Để ý rằng: $\text{cotg}\alpha + \text{cotg}\beta = \dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha.\sin\beta} = \dfrac{2\sin\gamma}{2\sin\alpha.\sin\beta} = \dfrac{2\sin\gamma}{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}$

$$\geq \frac{2\sin\gamma}{1-\cos(\alpha+\beta)} = \frac{2\sin\gamma}{1+\cos\gamma} = \frac{4\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}{2\cos^2\frac{\gamma}{2}} = 2\text{tg}\frac{\gamma}{2} \Rightarrow \text{cotg}\alpha+\text{cotg}\beta-2\text{tg}\frac{\gamma}{2} \geq 0$$

T đó suy ra $S \geq 0$. Với $x = y = z = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ thì $\text{Min}S = 0$

<u>VD2</u>: Cho $0 < x, y, z < 1$ và $\dfrac{x}{1-x^2}+\dfrac{y}{1-y^2}+\dfrac{z}{1-z^2} = \dfrac{4xyz}{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)}$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = x^2 + y^2 + z^2$

<u>Giải</u>:

Do $0 < x, y, z < 1$ nên đặt $x = \text{tg}\frac{\alpha}{2}$; $y = \text{tg}\frac{\beta}{2}$; $z = \text{tg}\frac{\gamma}{2}$ với $\alpha, \beta, \gamma \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

Khi đó $\text{tg}\alpha = \dfrac{2x}{1-x^2}$; $\text{tg}\beta = \dfrac{2y}{1-y^2}$; $\text{tg}\gamma = \dfrac{2z}{1-z^2}$ và đẳng thức ở giả thiết

$$\Leftrightarrow \frac{2x}{1-x^2}+\frac{2y}{1-y^2}+\frac{2z}{1-z^2} = \frac{8xyz}{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)} \Leftrightarrow \text{tg}\alpha+\text{tg}\beta+\text{tg}\gamma = \text{tg}\alpha.\text{tg}\beta.\text{tg}\gamma$$

$\Leftrightarrow$ tgα + tgβ = - tgγ(1-tgα.tgβ) $\Leftrightarrow \dfrac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha.tg\beta}$ = - tgγ $\Leftrightarrow$ tg(α+β) = tg(-γ)

Do α, β, γ $\in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ nên α + β = π - γ $\Leftrightarrow$ α + β + γ = π. Khi đó ta có:

$tg\dfrac{\alpha}{2}tg\dfrac{\beta}{2} + tg\dfrac{\beta}{2}tg\dfrac{\gamma}{2} + tg\dfrac{\gamma}{2}tg\dfrac{\alpha}{2} = 1 \Leftrightarrow xy + yz + zx = 1$. Mặt khác:

$(x^2 + y^2 + z^2) - (xy + yz + zx) = \dfrac{1}{2}\left[(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2\right] \geq 0$

$\Rightarrow S = x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx = 1$. Với $x = y = z = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ thì MinS = 1

VD3: Cho $\begin{cases} x, y, z > 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$. Chứng minh rằng: $S = \dfrac{x}{x+yz} + \dfrac{y}{y+zx} + \dfrac{z}{z+xy} \leq \dfrac{9}{4}$

Giải:

Đặt $\sqrt{\dfrac{yz}{x}} = tg\dfrac{\alpha}{2}$; $\sqrt{\dfrac{xz}{y}} = tg\dfrac{\beta}{2}$; $\sqrt{\dfrac{xy}{z}} = tg\dfrac{\gamma}{2}$ với α, β, γ $\in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$

Do $\sqrt{\dfrac{yz}{x}}.\sqrt{\dfrac{zx}{y}} + \sqrt{\dfrac{zx}{y}}.\sqrt{\dfrac{xy}{z}} + .\sqrt{\dfrac{xy}{z}}.\sqrt{\dfrac{yz}{x}} = x + y + z = 1$

nên $tg\dfrac{\alpha}{2}tg\dfrac{\beta}{2} + tg\dfrac{\beta}{2}tg\dfrac{\gamma}{2} + tg\dfrac{\gamma}{2}tg\dfrac{\alpha}{2} = 1$

$\Leftrightarrow tg\left(\dfrac{\beta}{2} + \dfrac{\gamma}{2}\right) = cotg\dfrac{\alpha}{2} \Leftrightarrow tg\left(\dfrac{\beta}{2} + \dfrac{\gamma}{2}\right) = tg\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\alpha}{2}\right) \Leftrightarrow \dfrac{\beta}{2} + \dfrac{\gamma}{2} = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\alpha}{2}$

$\Leftrightarrow \dfrac{\alpha + \beta + \gamma}{2} = \dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow \alpha + \beta + \gamma = \pi$

$$S = \frac{x}{x+yz} + \frac{y}{y+zx} + \frac{z}{z+xy} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{2x}{x+yz} - 1\right) + \left(\frac{2y}{y+zx} - 1\right) + \left(\frac{2z}{z+xy} - 1\right)\right] + \frac{3}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{x-yz}{x+yz} + \frac{y-zx}{y+zx} + \frac{z-xy}{z+xy}\right) + \frac{3}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1-\frac{yz}{x}}{1+\frac{yz}{x}} + \frac{1-\frac{zx}{y}}{1+\frac{zx}{y}} + \frac{1-\frac{xy}{z}}{1+\frac{xy}{z}}\right) + \frac{3}{2}$$

$$= \frac{1}{2}(\cos + \cos\beta + \cos\gamma) + \frac{3}{2} = \frac{1}{2}\left[(\cos\alpha + \cos\beta).1 - (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha + \sin\beta)\right] + \frac{3}{2}$$

$$\le \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}((\cos\alpha+\cos\beta)^2+1)+\frac{1}{2}(\sin^2\alpha+\sin^2\beta)-\cos\alpha\cos\beta\right]+\frac{3}{2}=\frac{3}{4}+\frac{3}{2}=\frac{9}{4} \text{ (đpcm)}$$

3. Các bài toán đưa ra trắc nghiệm

~~Trước khi tôi dạy thử nghiệm nội dung sáng kiến của tôi cho học sinh của 2 lớp 11A1 và 11A2 ở trường tôi, tôi đã ra bài về nhà cho các em, cho các em chuẩn bị trước trong thời gian 2 tuần. Với các bài tập sau:~~

Bài 1: Cho $a^2 + b^2 = 1$. CMR: $|20a^3 - 15a + 36b - 48b^3| \le 13$.

Bài 2: Cho $(a-2)^2 + (b-1)^2 = 5$. CMR: $2a + b \le 10$.

Bài 3: Cho $\begin{cases} a;b \ge 0 \\ a+b=2 \end{cases}$ CMR: $a^4 + b^4 \ge a^3 + b^3$

Bài 4: Cho a; b ; c ≥ 1 CMR: $\left(a-\frac{1}{b}\right)\left(b-\frac{1}{c}\right)\left(c-\frac{1}{a}\right) \ge \left(a-\frac{1}{a}\right)\left(b-\frac{1}{b}\right)\left(c-\frac{1}{c}\right)$

Bài 5: Cho $\begin{cases} x;y;z>0 \\ x^2+y^2+z^2+2xyz=1 \end{cases}$ CMR:

a) $xyz \le \frac{1}{8}$

b) $xy + yz + zx \le \frac{3}{4}$

c) $x^2 + y^2 + z^2 \ge \frac{3}{4}$

d) $xy + yz + zx \le 2xyz + \frac{1}{2}$

e) $\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \sqrt{\frac{1-y}{1+y}} + \sqrt{\frac{1-z}{1+z}} \ge \sqrt{3}$

Bài 6: CMR: $\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+b^2}} \le \frac{2}{\sqrt{1+ab}}$ $\forall$ a, b $\in$ (0, 1]

Bài 7: CMR: $(a^2 + 2)(b^2 + 2)(c^2 + 2) \ge 9(ab + bc + ca)$ $\forall$ a, b, c > 0

Bài 8: Cho $\begin{cases} x,y,z>0 \\ xy+yz+zx=1 \end{cases}$ CMR : $\frac{x}{1-x^2}+\frac{y}{1-y^2}+\frac{z}{1-z^2} \ge \frac{3\sqrt{3}}{2}$

Bài 9: Cho $\begin{cases} x,y,z>0 \\ x+y+z=xyz \end{cases}$ CMR : $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}+\frac{z}{\sqrt{1+z^2}} \le \frac{3}{2}$

Bài 10: Cho $\begin{cases} x,y,z>0 \\ xy+yz+zx=1 \end{cases}$ CMR $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+z^2}}\geq\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{2y}{\sqrt{1+y^2}}+\frac{2z}{\sqrt{1+z^2}}$